

## 2.6 Contraintes et forces de liaison

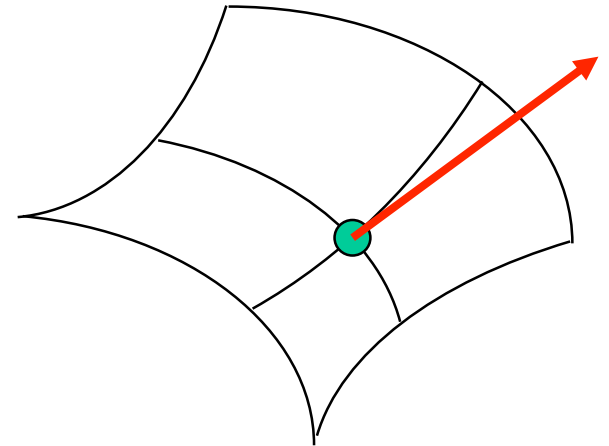
La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en **mouvement sous l'influence des actions mécaniques (ou forces)** qui leur sont appliquées

Déjà rencontrée: force de pesanteur et frottement avec l'air

- Point matériel restreint à se déplacer sur un support, par exemple une courbe ou une surface lisse (fixe ou en mouvement)

- Exemples:

- Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
- Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
- Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
- Bille dans un anneau en rotation



- **Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique**

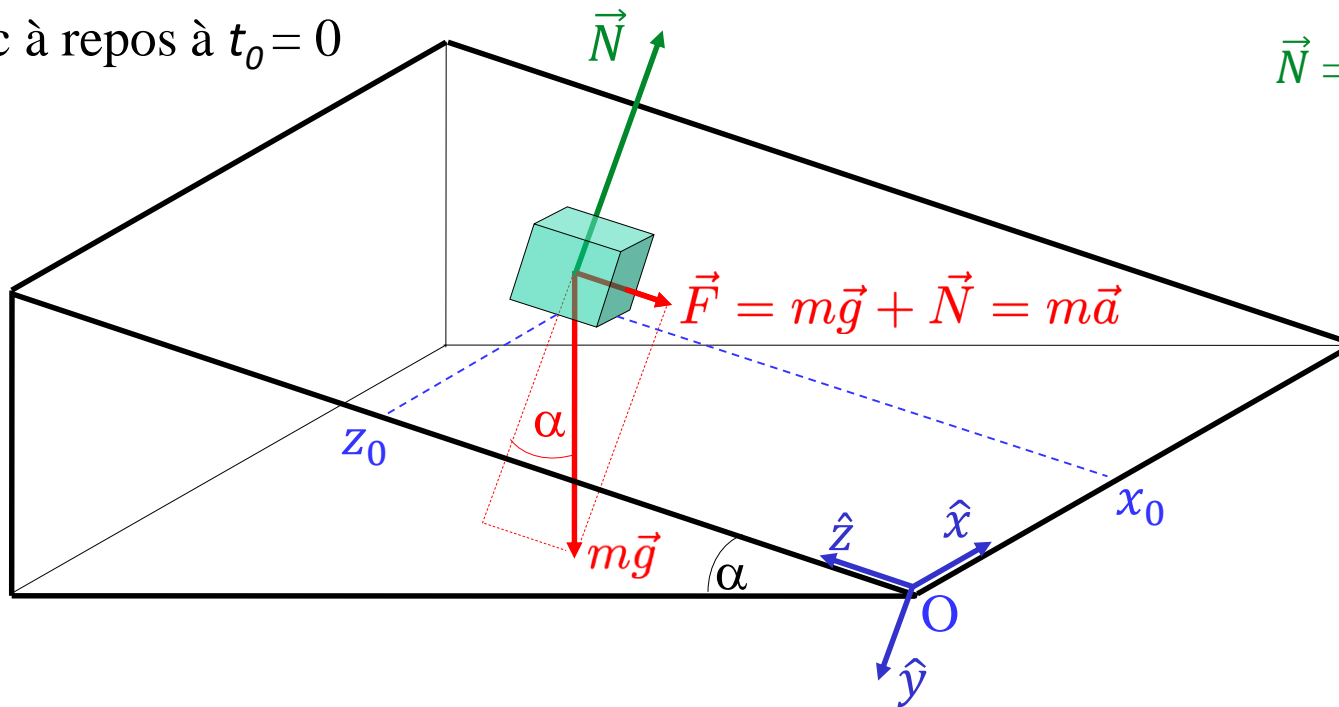
- **toujours perpendiculaire au support**

- **la force de liaison devient nulle  $\Leftrightarrow$  la contrainte disparaît**

- Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
- Le force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre

## 2.6 Ex.: Plan incliné sans frottement

Bloc à repos à  $t_0 = 0$



$\vec{N}$  = force de « liaison » qui contraint le point matériel à rester sur le plan incliné (perpendiculaire au plan)

Répère  $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

Projection sur axe x:

$$m\ddot{x} = F_x = 0$$

Projection sur axe y:

$$m\ddot{y} = F_y = mg \cos \alpha - N = 0$$

Projection sur axe z:

$$m\ddot{z} = F_z = -mg \sin \alpha$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \sin \alpha \end{pmatrix}$$



$$x(t) = x_0$$

$$y(t) = 0; \quad N(t) = mg \cos \alpha$$

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

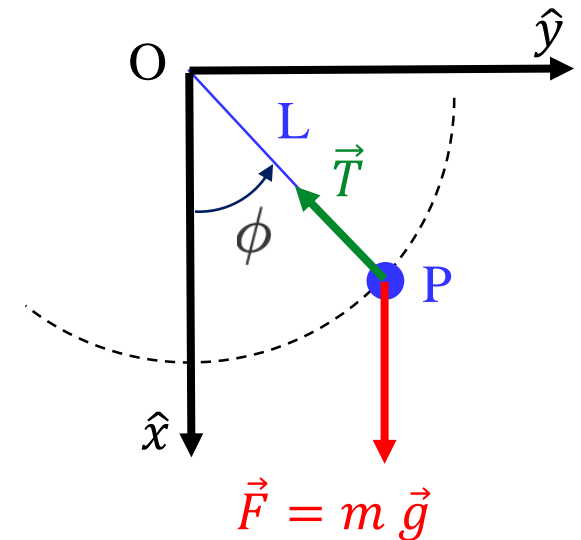
## 2.6 Ex.: le pendule mathématique

Une masse P, que on considère punctiforme, est attachée avec une ficelle de masse négligeable au point O.

On bouge la masse P tel que la ficelle forme un angle  $\phi_0$  avec la vertical à  $t_0 = 0$ .

A l'instant  $t_0 = 0$  on laisse la masse P libre de osciller

La **contrainte ou force de liaison** est représentée par la ficelle. Si on part avec la ficelle tendue, la ficelle oblige la masse P à suivre un arc de circonférence ( $\vec{T}$  = tension de la ficelle)



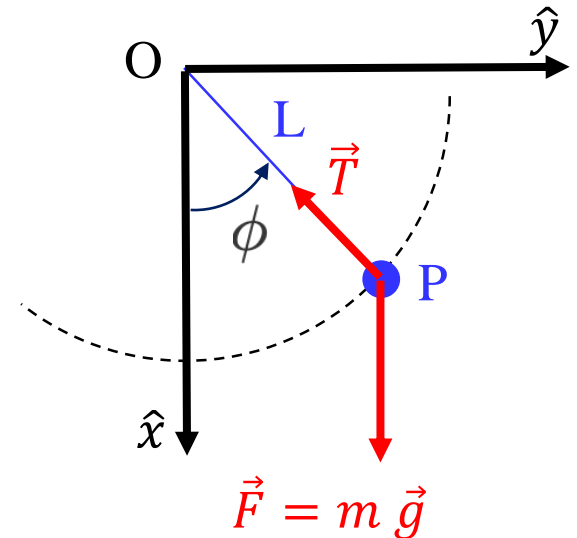
### Quiz

- 1) Est ce que la période d'oscillation d'un pendule dépend de la masse?
- 2) Est-ce que la période d'oscillation dépende de l'angle initiale ?

## 2.6 Ex.: le pendule mathématique

On essaye de trouver la solution en utilisant le repère fixe

Repère cartésien fixe:  $O \hat{x} \hat{y} \hat{z}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} \cdot \hat{x} + m \vec{g} \cdot \hat{x} = m \ddot{x} \\ \vec{T} \cdot \hat{y} = m \ddot{y} \\ m \ddot{z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -T(t) \cos \phi + m g = m \ddot{x} \\ -T(t) \sin \phi = m \ddot{y} \\ z = cste \end{array} \right.$$

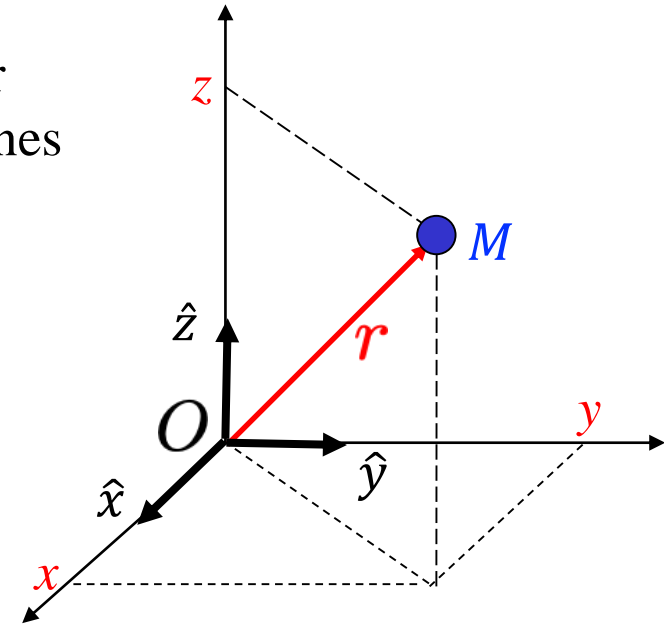
Solution compliquée parce que la tension  $T(t)$  et l'angle  $\phi(t)$  sont des fonctions du temps

## 2.3 Mouvement d'un point matériel M

Jusqu'à maintenant on a décrit le mouvement d'un point M par rapport au repère  $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  en utilisant des coordonnées cartésiennes

Position:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$



Pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées (ou bases)

Exemples:

Coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

Coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$

Coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$

Le choix meilleur dépend du problème à traiter

## 2.3 Base en rotation

- La description d'un système peut être faite selon deux points de vue:
  - **Système physique en rotation** dans un système de coordonnées (Base) fixe
    - Mouvement circulaire d'un point matériel (satellite par rapport au Pole Nord)
    - Mouvement de rotation d'un solide sur lui-même (toupie, Terre, ...)
  - **Système physique fixe** dans un système de coordonnées (Base) en rotation
    - Base  $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  solidaire avec un satellite

### Théorème d'Euler:

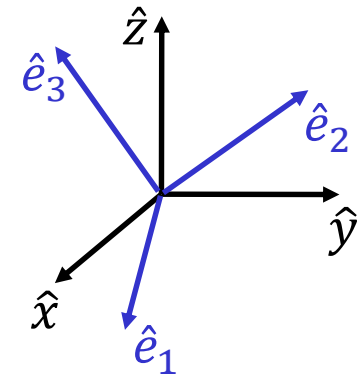
Soit deux bases orthonormées droites de même origine :  
il existe toujours une rotation qui amène la première sur  
la deuxième

Choix de la base en rotation:

$\hat{e}_1 \perp \hat{t}$       perpendiculaire à la trajectoire

$\hat{e}_2 = \hat{t}$       tangent à la trajectoire

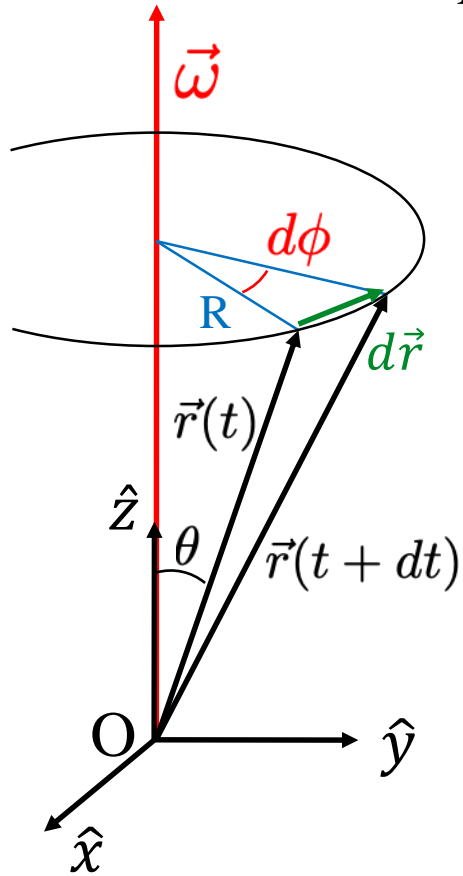
$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$  selon la règle de la main droite



Une rotation spatiale est caractérisée par un **axe de rotation** (dans l'espace),  
un **sens de rotation** et un **angle de rotation**

## 2.3 Mouvement circulaire ou rotation

Point matériel en mouvement le long d'une circonférence



$$|d\vec{r}| = R \tan(d\phi) = |\vec{r}| \sin \theta d\phi$$

$$|\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = |\vec{r}| \sin \theta \frac{d\phi}{dt} = |\vec{r}| |\vec{\omega}| \sin \theta$$

$\vec{\omega}$  (ou **vitesse angulaire**) est un vecteur avec:

- norme  $|\vec{\omega}| = \frac{d\phi}{dt}$
- direction définie par la règle de la main droite

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Vitesse

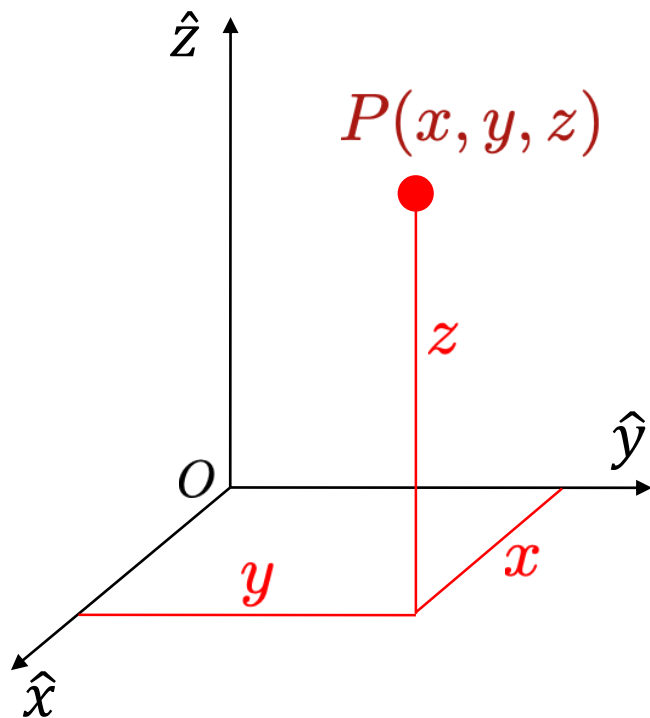
relation valide pour tous les vecteurs  
inclus les vecteurs unitaires d'un repère

$\Rightarrow$

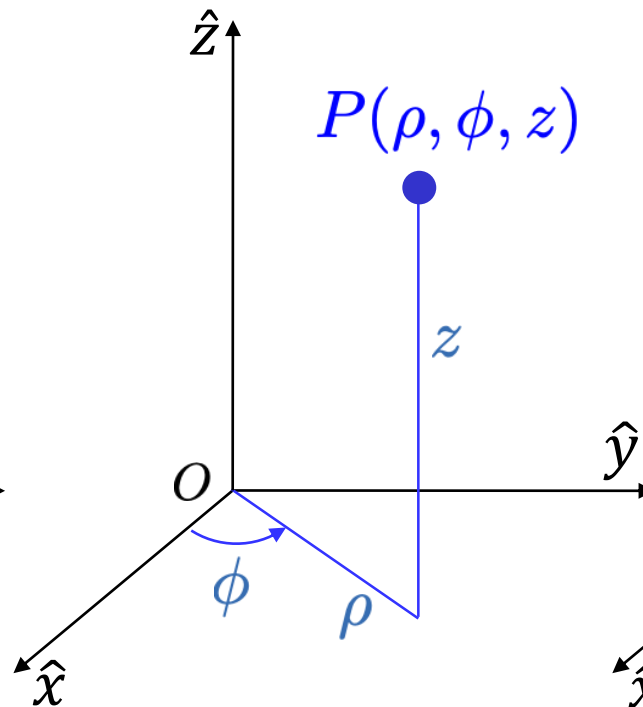
$$\dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i \quad \text{Formule de Poisson}$$

## 2.3 Différents systèmes de coordonnées

cartésiennes

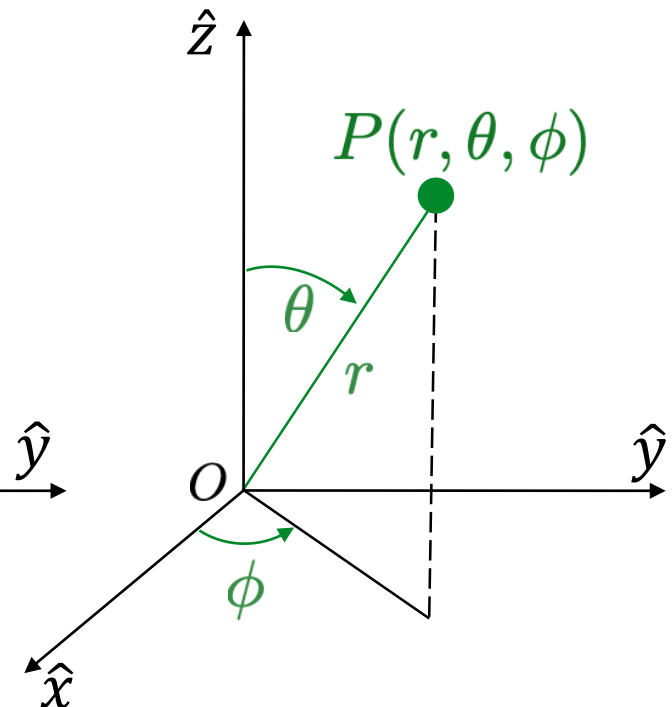


cylindriques



$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 \\ \phi &\in [0, 2\pi[ \\ z & \end{aligned}$$

sphériques

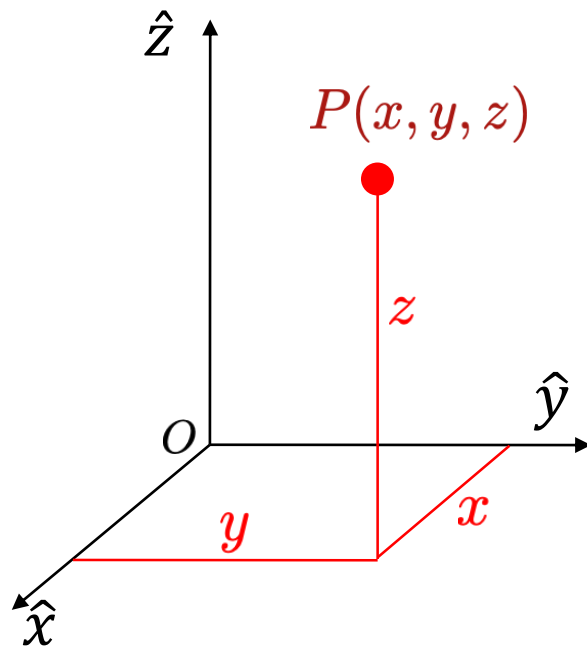


$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ \theta &\in [0, \pi] \\ \phi &\in [0, 2\pi[ \end{aligned}$$

- Autre ex.:
- Coordonnées polaires  $(\rho, \phi)$  quand  $z$  est constante
  - coordonnées géographiques sur le globe terrestre (latitude, longitude, altitude)

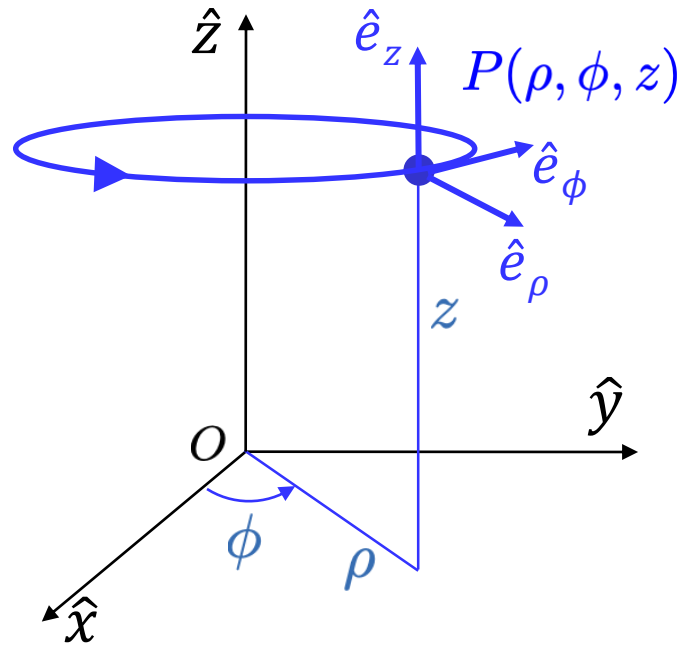
## 2.3 Bases (Repères) associés aux systèmes de coordonnées

cartésiennes



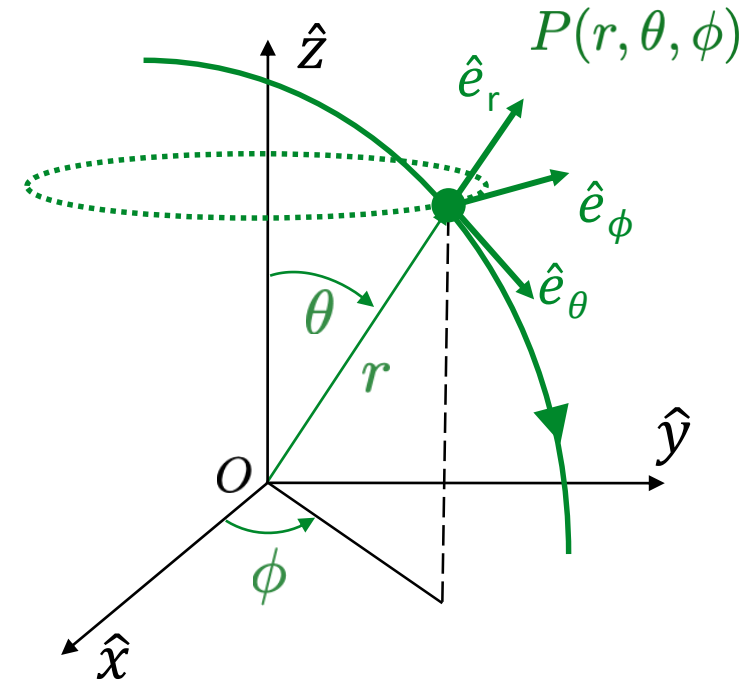
$O \hat{x} \hat{y} \hat{z}$

cylindriques



$O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$

sphériques



$O \hat{e}_r \hat{e}_\theta \hat{e}_\phi$

## 2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Point matériel  $P$  en mouvement
- Coordonnées cylindriques :

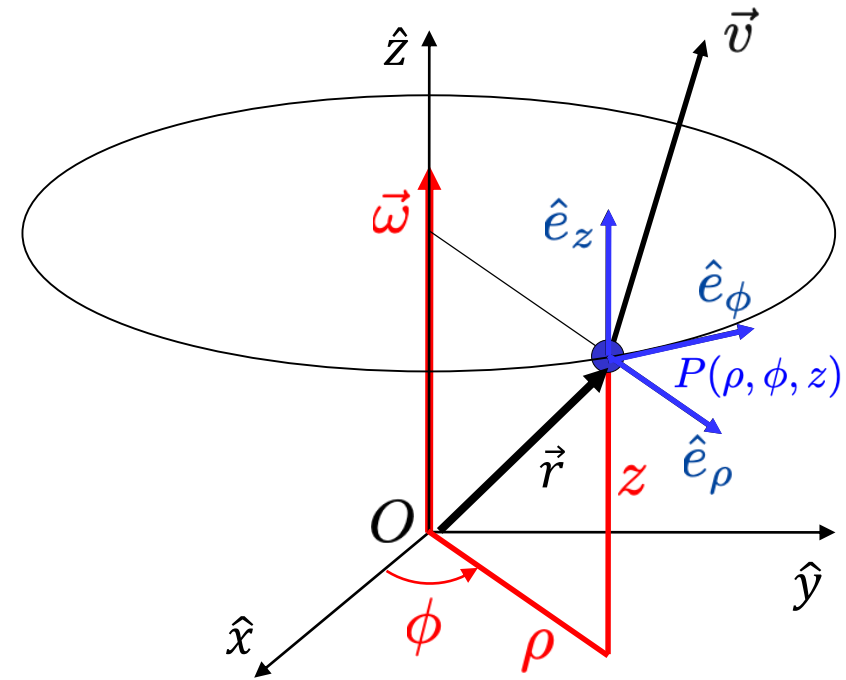
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) & \geq 0 \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[ \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées cylindriques du point  $P$  :  $O \hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$

- Vitesse angulaire de rotation de la base:  $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{z} = \dot{\phi} \hat{z}$

- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



$\vec{v} \cdot \hat{e}_\rho =$  vitesse radiale

$\vec{v} \cdot \hat{e}_\phi =$  vitesse transverse

$\vec{a} \cdot \hat{e}_\rho =$  accélération radiale

$\vec{a} \cdot \hat{e}_\phi =$  accélération transverse

## 2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

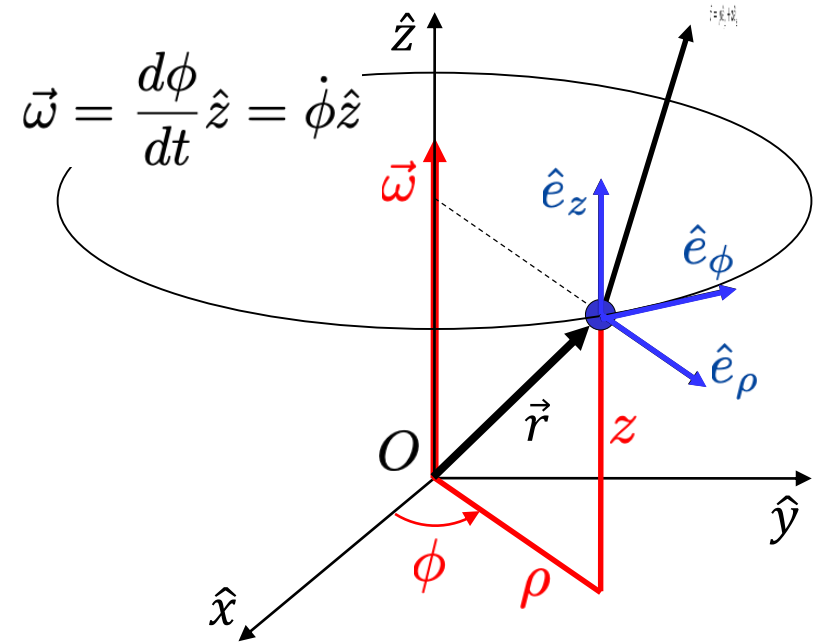
Calculé avec formule de Poisson:

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z + \dot{z} \dot{\hat{e}}_z = \\ &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + \ddot{z} \hat{e}_z = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$



Application de la formule de Poisson  
aux vecteurs de base

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho$$

$$\dot{\hat{e}}_z = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z = \dot{\phi} \hat{z} \wedge \hat{e}_z = 0$$

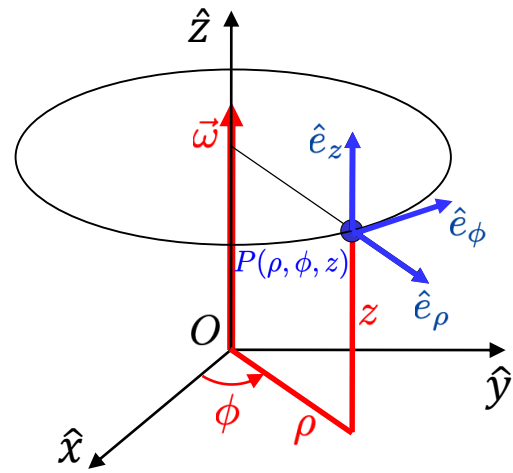
# 2.4 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

repère fixe  $\Rightarrow \dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \dot{\hat{z}} = 0$   
 $\ddot{\hat{x}} = \ddot{\hat{y}} = \ddot{\hat{z}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) = \frac{d}{dt}(x \hat{x}) + \frac{d}{dt}(y \hat{y}) + \frac{d}{dt}(z \hat{z}) \\ &= \dot{x} \hat{x} + \underbrace{x \dot{\hat{x}}}_{=0} + \dot{y} \hat{y} + \underbrace{y \dot{\hat{y}}}_{=0} + \dot{z} \hat{z} + \underbrace{z \dot{\hat{z}}}_{=0} \\ &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} \end{aligned}$$



$x = \rho \cos \phi$	$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$	$\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi} \sin \phi - \rho \ddot{\phi} \sin \phi - \rho \dot{\phi}^2 \cos \phi$
$y = \rho \sin \phi$	$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi$	$\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \cos \phi + \rho \ddot{\phi} \cos \phi - \rho \dot{\phi}^2 \sin \phi$
$z = z$	$\dot{z} = \dot{z}$	$\ddot{z} = \ddot{z}$

**Vecteurs du repère  
en coordonnées cylindriques:**

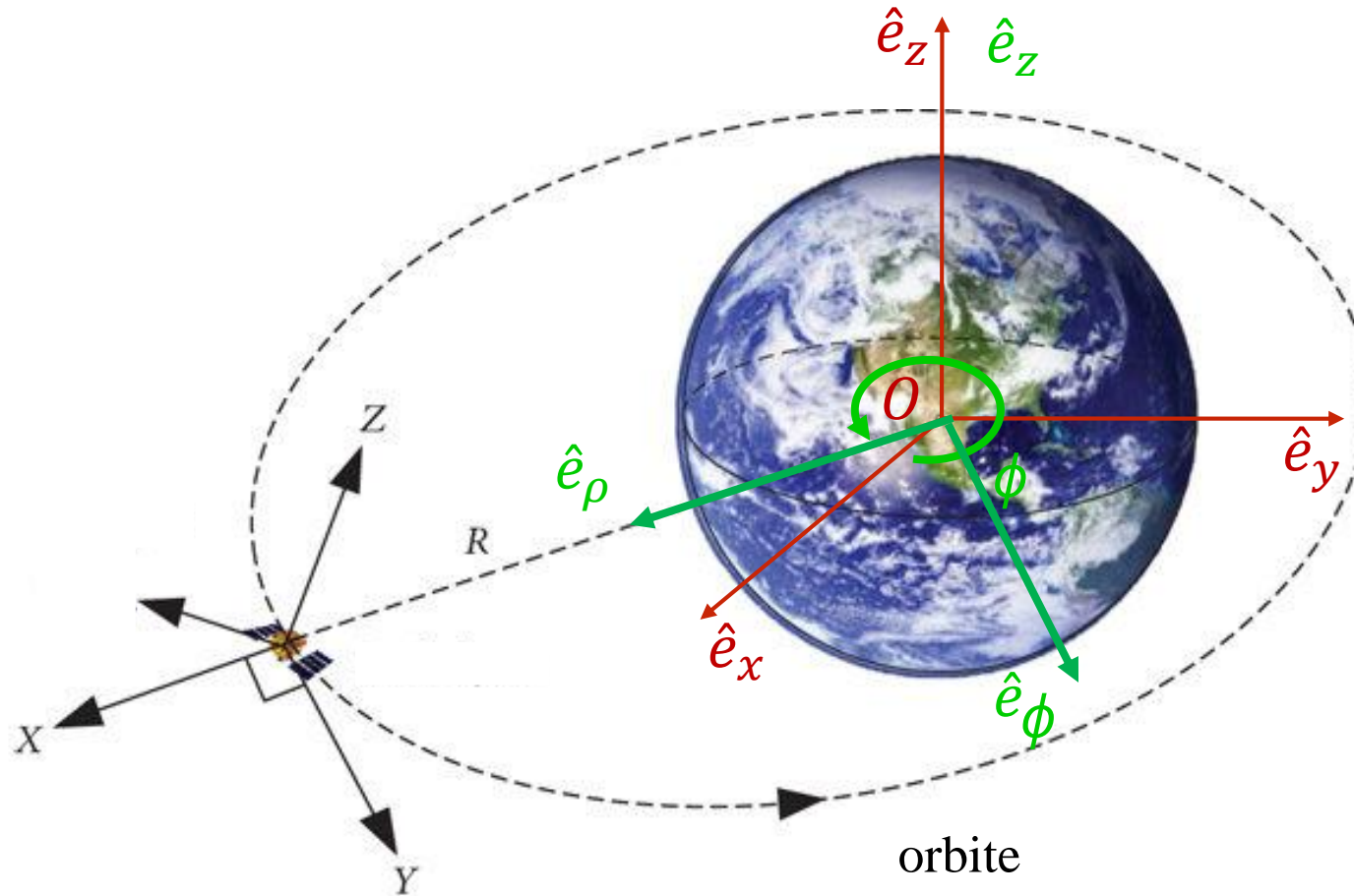
$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{y} &= \sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi \\ \hat{z} &= \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ &= \rho \cos \phi [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + \rho \sin \phi [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + z \hat{e}_z \\ &= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \\ &= (\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \dot{z} \hat{e}_z \\ &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} = (\ddot{\rho} \cos \phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi} \sin \phi - \rho \ddot{\phi} \sin \phi - \rho \dot{\phi}^2 \cos \phi) [\cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi] \\ &\quad + (\ddot{\rho} \sin \phi + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \cos \phi + \rho \ddot{\phi} \cos \phi - \rho \dot{\phi}^2 \sin \phi) [\sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi] + \ddot{z} \hat{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

**→ voir document “Cinématique et systèmes de coordonnées” sur Moodle**

## 2.4 Ex.: coordonnées cylindriques

mouvement d'un satellite autour de la Terre



## 2.6 Ex.: le pendule mathématique

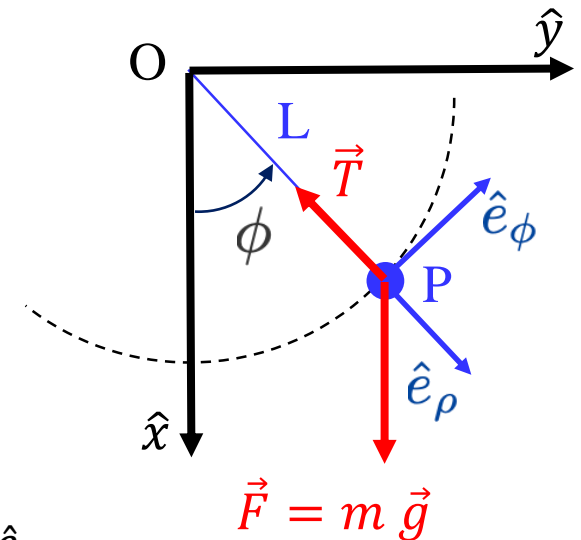
Repère cartésien fixe:  $O\hat{x}\hat{y}$

Repère en rotation:  $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi$

Contraintes:  $L = \text{cste} \Rightarrow \dot{\rho} = 0; \ddot{\rho} = 0$

2<sup>ème</sup> loi de Newton  $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

En coordonnées cylindriques  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$



$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho \\ \vec{T} \cdot \hat{e}_\phi + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + m g \cos \phi = -mL\dot{\phi}^2 \\ -m g \sin \phi = mL\ddot{\phi} \end{cases}$$

Le mouvement du pendule ne dépend pas de la masse  $\Rightarrow -g \sin \phi = L\ddot{\phi}$

Pour des petites oscillations  $\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \phi \sim \phi \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{L}\phi = -\omega_0^2\phi$

Equation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$

$\phi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  de période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

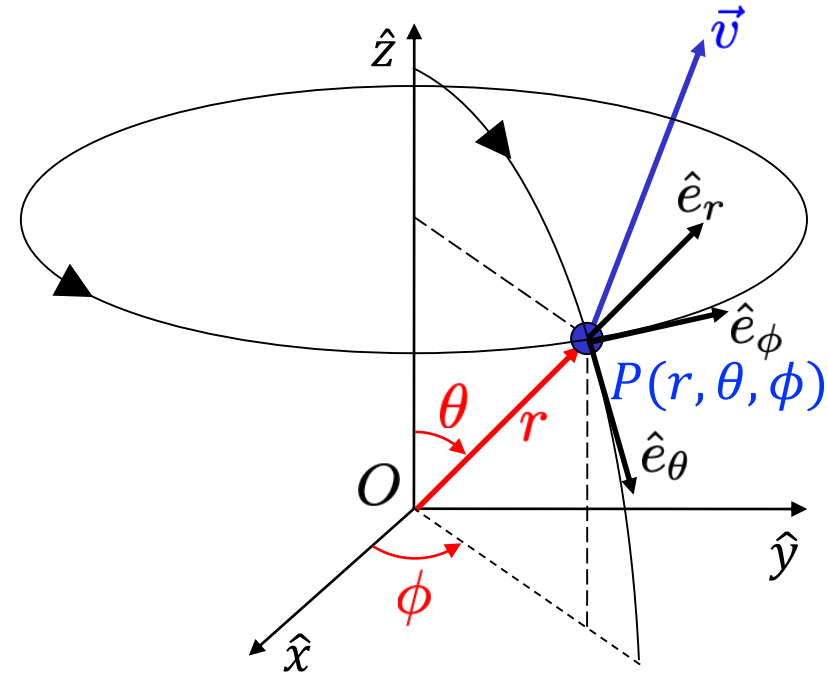
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

# 2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Point matériel P en mouvement
- Coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} r = r(t) & \geq 0 \\ \theta = \theta(t) & \in [0, \pi] \\ \phi = \phi(t) & \in [0, 2\pi[ \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- Base (repère) en rotation associé aux coordonnées sphériques du point P:  $O \hat{e}_r \hat{e}_\theta \hat{e}_\phi$



- Une rotation infinitésimale du vecteur  $\vec{r}$  est composée de
  - une rotation infinitésimale d'angle  $d\phi$  autour de l'axe  $\hat{z}$ :  $d\vec{r}_\phi = d\phi r \sin \theta \hat{e}_\phi = \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r}$
  - une rotation infinitésimale d'angle  $d\theta$  autour de  $\hat{e}_\phi$ :  $d\vec{r}_\theta = d\theta r \hat{e}_\theta = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r}$

⇒ rotation infinitésimale totale :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\theta + d\vec{r}_\phi = \dot{\theta} dt \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} dt \hat{z} \wedge \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi \wedge \vec{r} + \dot{\phi} \hat{z} \wedge \vec{r} = (\dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}) \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

- Vitesse angulaire de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

## 2.5 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

- Vitesse angulaire de rotation du repère :

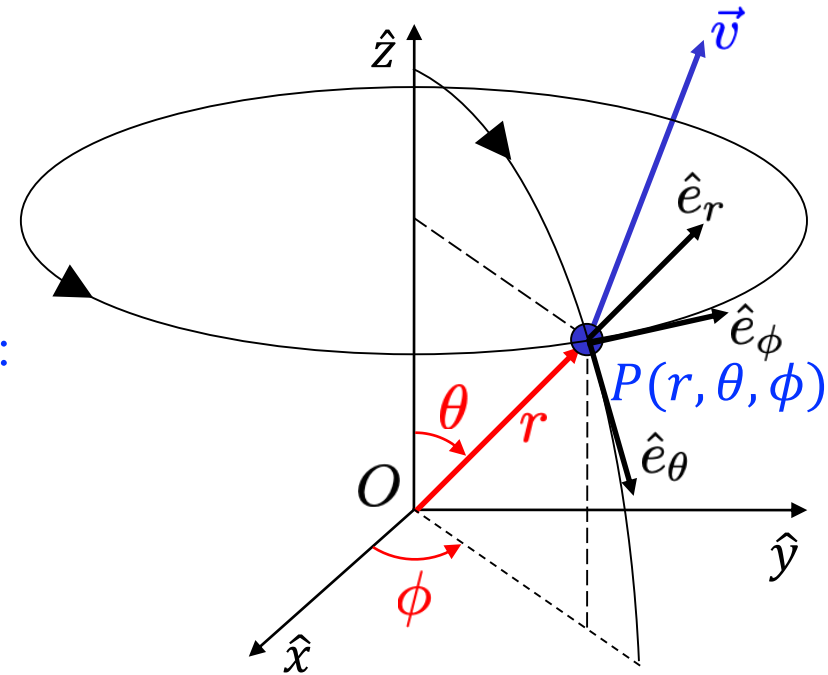
$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \hat{z}$$

- Formule de Poisson appliquée aux vecteurs de base :

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta$$



- Position, vitesse et accélération dans ce repère :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{e}_r$$

$$+ \left( r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{e}_\theta$$

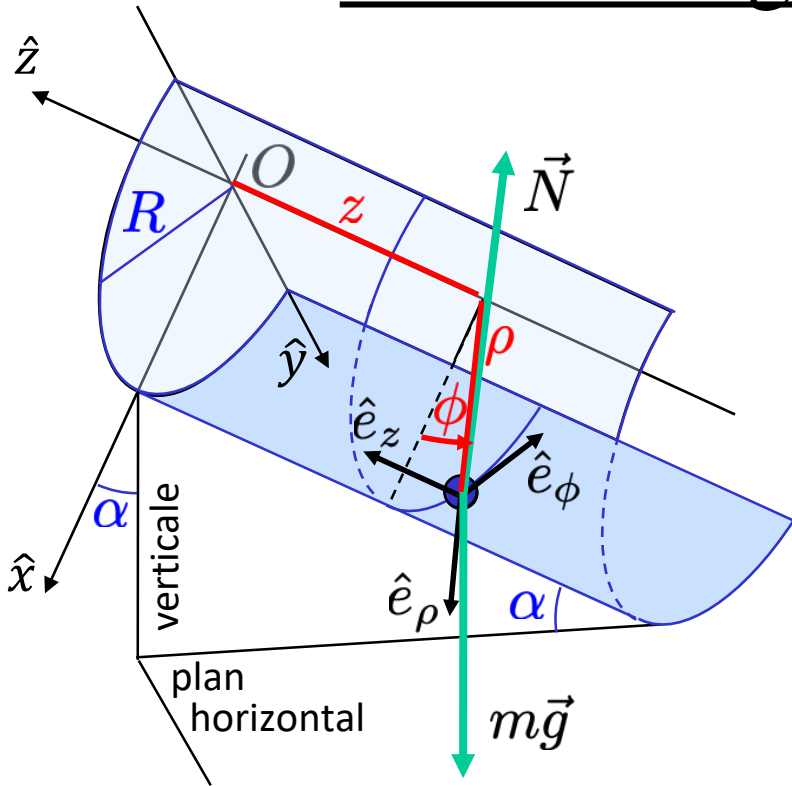
$$+ \left( r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{e}_\phi$$

accélération radiale

accélération méridienne

accélération transverse

## 2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



Repère cartésien fixe:  $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

Repère en rotation:  $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$

Contrainte: la luge reste sur la piste  $\rho = R \dot{\rho} = 0 \ddot{\rho} = 0$

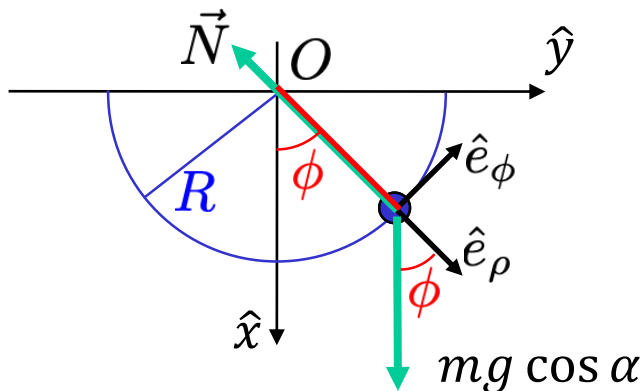
Pas de support en direction  $\hat{e}_\phi$  ( $\vec{N} \cdot \hat{e}_\phi = 0$ ) et  $\hat{e}_z$  ( $\vec{N} \cdot \hat{e}_z = 0$ )

En coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = \vec{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z$$

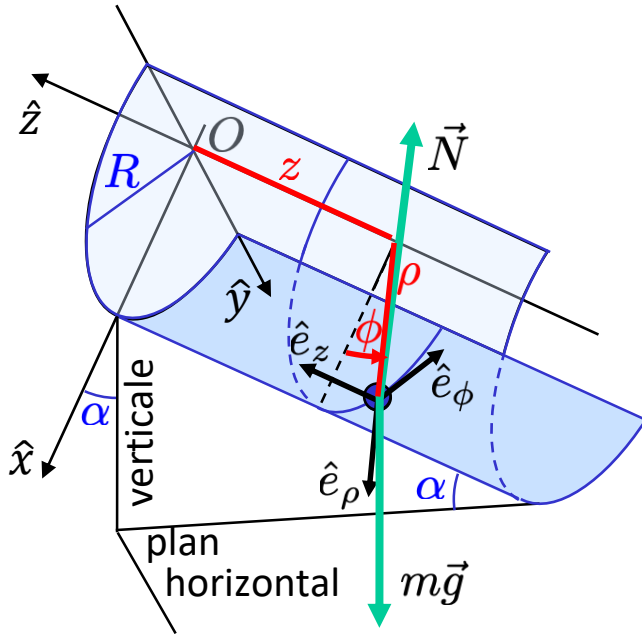
$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{N} \cdot \hat{e}_\rho + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\phi + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_z + m \vec{g} \cdot \hat{e}_z = m \ddot{z}\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \end{cases}$$

Projection sur plan  $\perp \hat{z}$



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -mR\dot{\phi}^2 \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = mR\ddot{\phi} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} \end{cases}$$

## 2.6 Ex.: Luge sur une piste cylindrique



$$\begin{cases} -N + m g \cos \alpha \cos \phi = -mR\dot{\phi}^2 & \text{eq. (1)} \\ -m g \cos \alpha \sin \phi = mR\ddot{\phi} & \text{eq. (2)} \\ -m g \sin \alpha = m \ddot{z} & \text{eq. (3)} \end{cases}$$

eq. (3)  $\Rightarrow$  Mouvement uniformément accéléré

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

eq. (2)  $\Rightarrow$  Mouvement du pendule (petites oscil.)

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

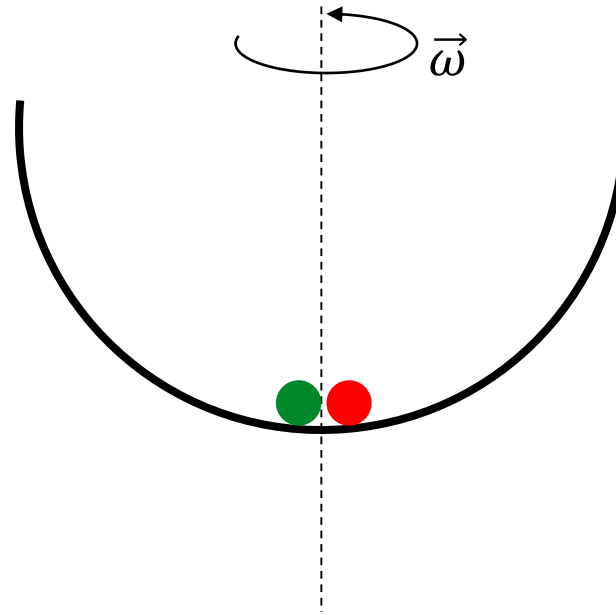
$$\ddot{\phi} = -\phi \frac{g}{R} \cos \alpha$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \cos \alpha}}$$

eq. (1)  $\Rightarrow$  Réaction de la paroi de la piste en fonction du temps:

$$N(t) = m g \cos \alpha \cos \phi + mR\dot{\phi}^2$$

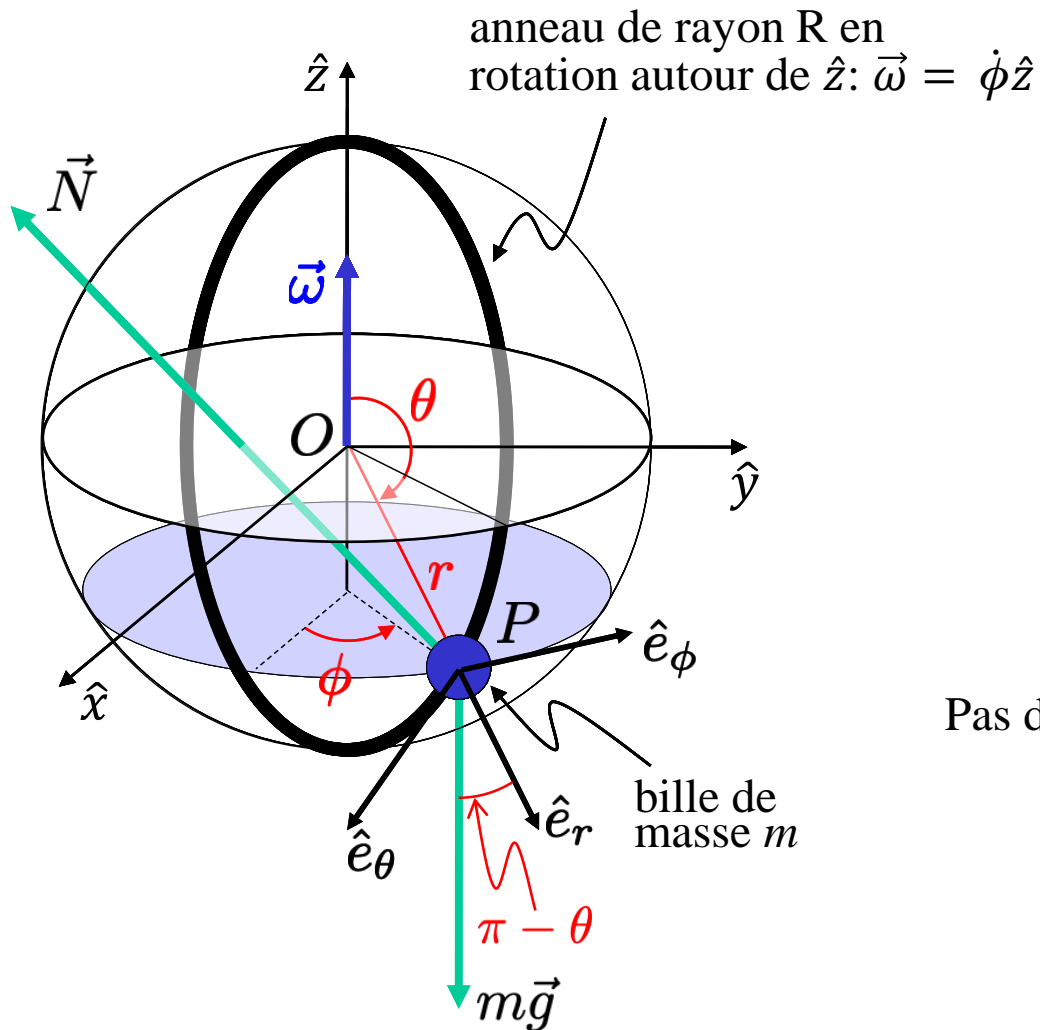
## 2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Deux balles de masse différente dans une glissière tournante: la quelle monte plus haut?

- 1) La plus légère
- 2) La plus lourde
- 3) identique

## 2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Contrainte: la bille reste sur l'anneau

$$\begin{cases} r = R, & \dot{r} = 0, & \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = \omega, & \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Pas de force de liaison en direction  $\hat{e}_\theta$ , tangent au support:

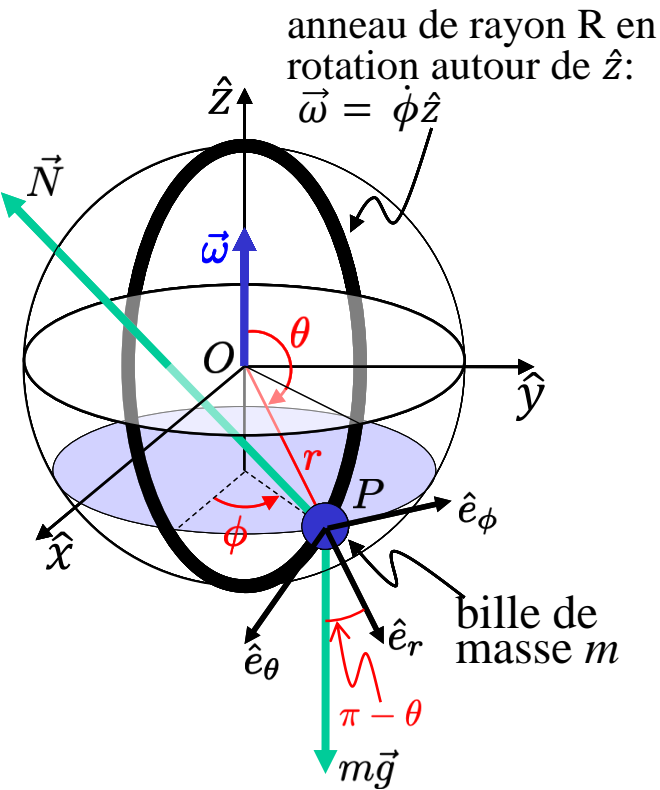
$$\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$$

bille en équilibre:  $\dot{\theta} = 0; \ddot{\theta} = 0$

Forces s'exerçant sur la bille:

- Poids de la bille:  $m\vec{g} = mg \cos(\pi - \theta) \hat{e}_r + mg \sin(\pi - \theta) \hat{e}_\theta$
- Force de liaison:  $\vec{N} = Nr\hat{e}_r + N_\phi\hat{e}_\phi$

## 2.6 Ex.: Bille en équilibre dans un tube circulaire en rotation



Coordonnées  
sphériques

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{N} \cdot \hat{e}_r + m \vec{g} \cdot \hat{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\theta + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta \\ \vec{N} \cdot \hat{e}_\phi + m \vec{g} \cdot \hat{e}_\phi = m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \end{array} \right.$$

bille en équilibre:  $\dot{\theta} = 0$ ;  $\ddot{\theta} = 0$

Contraintes:  $\dot{r} = 0$ ;  $\ddot{r} = 0$ ;  $\dot{\phi} = \omega$ ;  
 $\ddot{\phi} = 0$ ;  $\vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_r - mg \cos \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ mg \sin \theta = -mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N_\phi = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

Solutions possibles:

1)  $\sin \theta = 0$  ( $\Rightarrow \theta = 0$  ou  $\pi$ ),  $N_r = mg$   
bille sur l'axe vertical

2)  $\cos \theta = -\frac{g}{r\omega^2}$  ou  $\cos(\pi - \theta) = \frac{g}{r\omega^2} \leq 1$

$\Rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$ ;  $\Rightarrow \omega \rightarrow \infty \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$